弦线振动实验项目

一．基础知识

1．弦振动方程的推导

若横波在张紧的弦线上沿 x 轴正方向传播，我们取 $\overset{\frown}{AB}=ds$ 的微分段加以讨论（图 2）。设弦线的线密度（即单位长质量）为 ρ，则此微分段弦线 ds 的质量为 ρds。在 A、B 处受到左右邻段的张力分别为 T_1、T_2，其方向为沿弦线的切线方向与 x 轴交成 α_1、α_2 角。

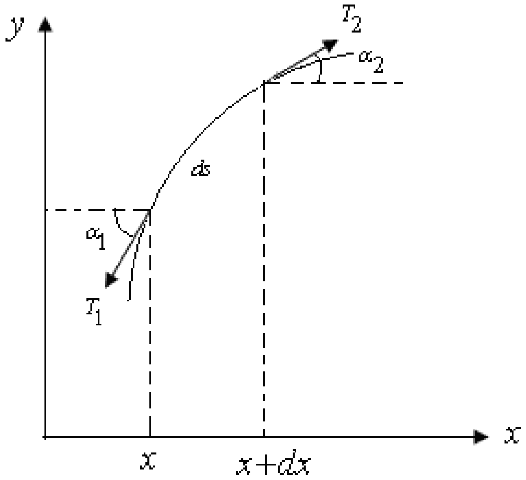


图 2

由于弦线上传播的横波在 x 方向无振动，所以作用在微分段 ds 上的张力的 x 分量应该为零，即

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=0 \tag{1}$$

又根据牛顿第二定律，在 y 方向微分段的运动方程为：

$$T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1=\rho ds\frac{d^2y}{dt^2} \tag{2}$$

对于小的振动，可取 $ds\approx dx$，而 α_1、α_2 都很小，所以 $\cos\alpha_1\approx1$，$\cos\alpha_2\approx1$，$\sin\alpha_1\approx tg\alpha_1$，$\sin\alpha_2\approx tg\alpha_2$。又从导数的几何意义可知 $tg\alpha_1=\left(\frac{dx}{dy}\right)_x$，$tg\alpha_2=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x+dx}$，式（1）将成为 $T_2-T_1=0$，即 $T_2=T_1=T$ 表示张力不随时间和地点而变，为一定值。式（2）将成为

$$T\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x+dx}-T\left(\frac{dy}{dx}\right)_x=\rho dx\frac{d^2y}{dt^2}。 \tag{3}$$

将 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x+dx}$ 按泰勒级数展开并略去二级微量，得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x+dx}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_x+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_x dx。$$

将此式代入式（3），得

$$T\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_x dx=\rho dx\frac{d^2y}{dt^2},$$

即

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{T}{\rho}\frac{d^2y}{dx^2}。\tag{4}$$

2．弦振动的振型

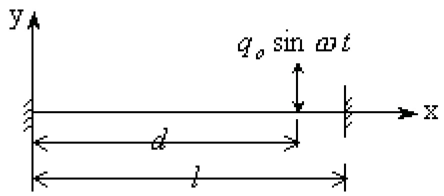


图 1

图 1 所示，两端固定且张紧的弦，在一点处受简谐干扰力作用的强迫振动问题可表示为下列波动方程的定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+\dfrac{1}{\rho}q(x,t)\\ y\big|_{x=0}=y\big|_{x=l}=0\\ y\big|_{t=0}=\dfrac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}\tag{1}$$

这里，$a=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ 为振动的传播速度，T 为弦的张力，ρ 为弦的线密度，

$q(x,t)=q_0\sin\omega t\delta(x-d)$ 为集中干扰力。

弦振动系统的固有频率和主振型可从式（1）$q(x,t)=0$ 所对应的齐次方程解出，

固有频率：$\omega_{ni}=\dfrac{i\pi a}{l}$（$i=1,2,3\cdots$）　　(2)₁

主振型：$\phi_i(x)=\sin\dfrac{i\pi x}{l}$（$i=1,2,3\cdots$）　　(2)₂

系统的受迫振动响应可表示为各阶主振型的线性组合，即

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}H_i(t)\sin\frac{i\pi x}{l}\tag{3}$$

其中 $H_i(t)$（$i=1,2,3\cdots$）称为主坐标，它表示系统各相应阶主振型对响应的贡献。 将式（3）代入式（1），根据数理方程的求解方法，可求得

$$H_i(t)=\frac{2q_0}{\rho l}\sin\frac{i\pi d}{l}\frac{1}{\omega_{ni}(\omega^2-\omega_{ni}^2)}(\omega\sin\omega_{ni}t-\omega_{ni}\sin\omega t)\tag{4}$$

由式（4）知当$\omega=\omega_{ni}$（激励频率等于第i阶固有频率）时，第i阶主坐标$H_i(t)$将随时间t无限增大（利用洛比达法则判定），其余各阶主坐标$H_s(t)(s=1,2\cdots;且\, s\neq i)$为有限。因此，（3）式可表示为

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}H_i(t)\sin\frac{i\pi x}{l}\approx H_i(t)\sin\frac{i\pi x}{l} \tag{5}$$

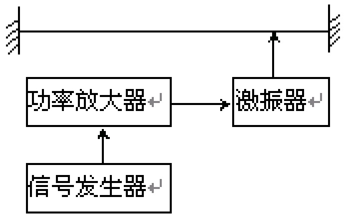


图 2

这表明发生第i阶共振时，其共振振型与第i阶主振型一致。据此，利用图 2 所示的单点稳态正弦激励装置，通过信号发生器对系统进行稳态正弦扫频，在激励频率等于各阶固有频率时，获得各阶主振型。系统的前三阶的主振型如图 3 所示。

第一阶主振型 ，$\omega=\frac{x\pi}{l},\varphi_1(x)=\sin\frac{x\pi}{l}$

第二阶主振型 ，$\omega=\frac{2x\pi}{l},\varphi_1(x)=\sin\frac{2x\pi}{l}$

第三阶主振型 ，$\omega=\frac{3x\pi}{l},\varphi_1(x)=\sin\frac{3x\pi}{l}$

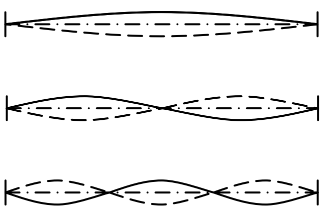


图 3

思考题

a．弦振动的固有频率与什么因素有关？

b．如何从实验观察中判断振型的阶次？

c．为什么利用稳态正弦激励可获得系统的各阶主振型？

3．弦振动共振波形及相关物理量

正弦波沿着拉紧的弦传播，根据以上内容，可用等式(1)来描述。

$$y_1=y_m\sin 2\pi(x/\lambda-f\cdot t) \tag{1}$$

如果弦的一端被固定，那么当波到达端点时会反射回来，这反射波可表示为：

$$y_2=y_m\sin 2\pi(x/\lambda-f\cdot t) \tag{2}$$

在保证这些波的振幅不超过弦所能承受的最大振幅时，两束波叠加后的波方程为：

$$y = y_1 + y_2 = y_m \sin 2\pi(x/\lambda - f \cdot t) + y_m \sin 2\pi(x/\lambda - f \cdot t) \qquad (3)$$

利用三角公式可求得：

$$y = 2y_m \sin(2\pi \cdot x/\lambda)\cos(2\pi \cdot f \cdot t) \qquad (4)$$

等式的特点：当时间固定为t_0时，弦的形状是振幅为$2y_m \cos(2\pi \cdot f \cdot t_0)$的正弦波形。在位置固定为 x_0 时，弦作简谐振动，振幅为 $2y_m \sin(2\pi \cdot x_0/\lambda)$ 。因此，当 $x_0 = \frac{1}{4}$L，$L\frac{3}{4}$，$L\frac{5}{4}L$……，振幅达到最大，当$x_0 = \frac{1}{2}L$ ，L ，$\frac{3}{2}L$……，振幅为零。这种波形叫驻波。

以上分析是假定驻波是由原波和反射波叠加而成的，实际上弦的两端都是被固定的，在驱动线圈的激励下，弦线受到一个交变磁场力的作用，会产生振动，形成横波。当波传到一端时都会发生反射，一般来说，不是所有增加的反射都是同相的，而且振幅都很小。当均匀弦线的两个固定端之间的距离等于弦线中横波的半波长的整数倍时，反射波就会同相，产生振幅很大的驻波，弦线会形成稳定的振动。当弦线的振动为一个波腹时，该驻波为基波，基波对应的的驻波频率为基频，也称共振频率。当弦线的振动为两个波腹时，该驻波为二次谐波，对应的的驻波频率为基频的两倍。一般情况下，基波的振动幅度比谐波的振动幅度大。

另外，从弦线上观察到的频率（即从示波器上观察到的波形）一般是驱动频率的两倍，这是因为驱动的磁场力在一个周期内两次作用于弦线的缘故。当然，通过仔细的调节，弦线的驻波频率等于驱动频率或者其他倍数也是可能的，这时的振幅会小些。

下面就共振频率与弦长、张力、弦的线密度之间的关系进行分析。

只有当弦线的两个固定端的距离等于弦线中横波对应的半波长的整数倍时，才能形成驻波，即有：

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad 或 \quad \lambda = \frac{2 \cdot L}{n}$$

其中L为弦长，λ为驻波波长，n为波腹数

另外，根据波动理论，假设弦柔性很好，波在弦上传播速度（V）取决于两个变量：线密度（μ）和弦的拉紧度（T），其关系式为：

$$V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (5)$$

其中μ 为弦线的线密度，即单位长度的弦线的质量（单位：kg/m ）T为弦线的张力，单位：N ，或$kg \cdot m/s^2$

再根据$V = f \cdot \lambda$ 这个普遍公式可得：

$$V = f \cdot \lambda = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (6)$$

如果已知 μ 值时，即可求得频率：

$$f = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \cdot \frac{n}{2L} \tag{7}$$

如果已知 f ，则可求得线密度：

$$\mu = \frac{\mathrm{n}^2 \cdot T}{4L^2 \cdot f^2} \tag{8}$$

与弦振动相关的乐理 （参看预习系统的参考资料）

二．　研究内容

1　根据所提供的资料或自己查阅相关资料，回答弦线频率测量仪不同标定位置的意义。

2　拨动弦线，感受音调与弦长的定性关系，及弦振动的振幅与弦长的定性关系。

3　对第 3 条弦（连接有拉力计的弦），根据下列表格测量数据，给出弦长--基频曲线及拉力的方均根的倒数--基频关系曲线，结合理论公式，分析测量结果。

$l_0 = 1.2m$

拉力F / 基频f / 弦长s	60N	65N	70N	75N	80N	85N
$\frac{4}{5}l_0$						
$\frac{3}{4}l_0$						
$\frac{2}{3}l_0$						
$\frac{3}{5}l_0$						
$\frac{8}{15}l_0$						
$\frac{1}{2}l_0$						

4　对 1、2 弦线，按下表测量数据，给出两条弦线的弦长—基频曲线，说明两条弦线有什么不同。

弦长 s / 基频 f / 弦	$\frac{4}{5}l_0$	$\frac{3}{4}l_0$	$\frac{2}{3}l_0$	$\frac{3}{5}l_0$	$\frac{8}{15}l_0$	$\frac{1}{2}l_0$
弦 1						
弦 2						

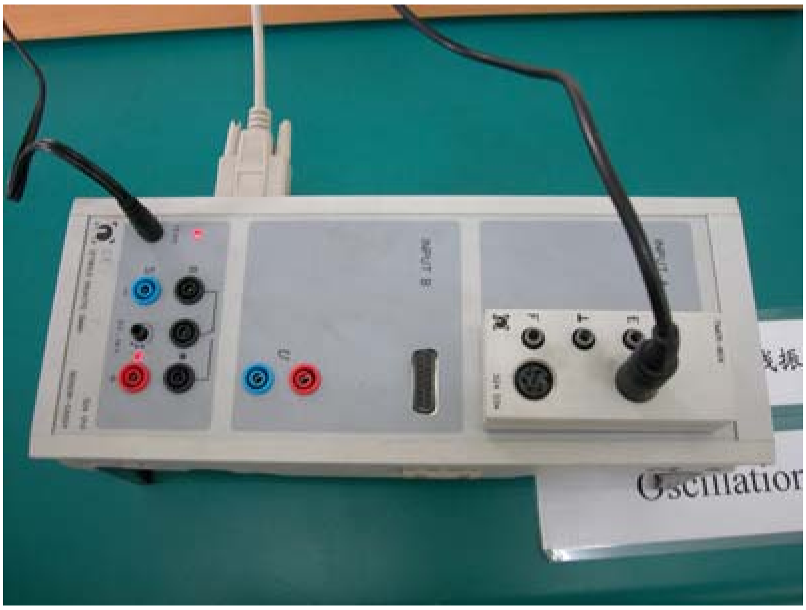
三．实验室仪器设备

1．　实验室设备

弦线频率测量仪，编号 41401；精密测力计，编号 314201；叉形红外光电门，编号 33746；传感器组件，编号 524010；Timerbox，编号 524034；基座，编号 00041；垫片；Cassy Leb 计算机测量和数据处理系统。

图 1　　实验室仪器

图 2　光电门

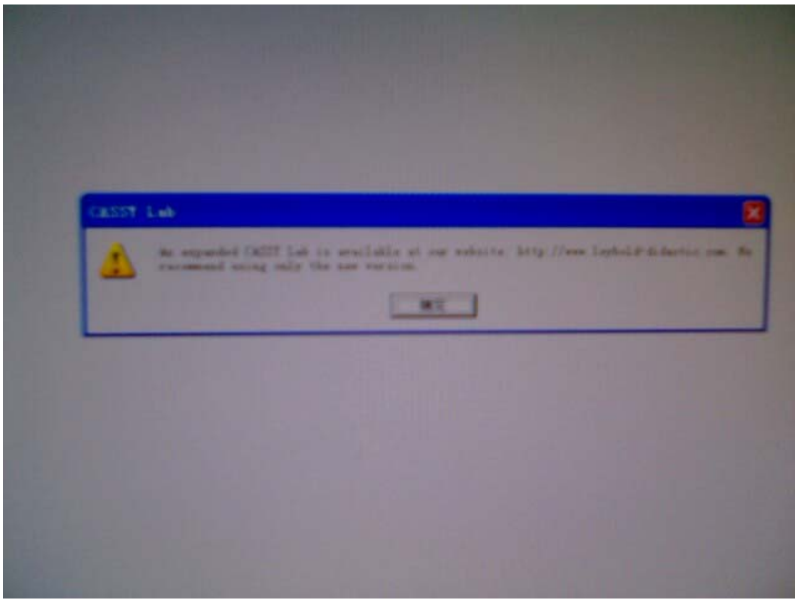


数据采集设备

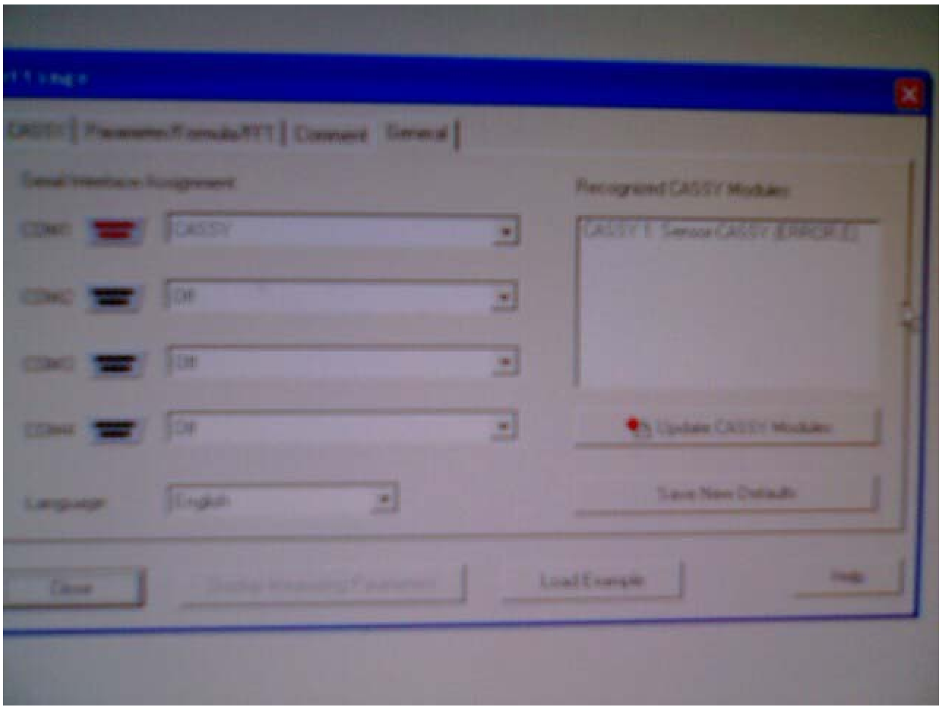
弦长改变支架

2．Cassy lab 软件

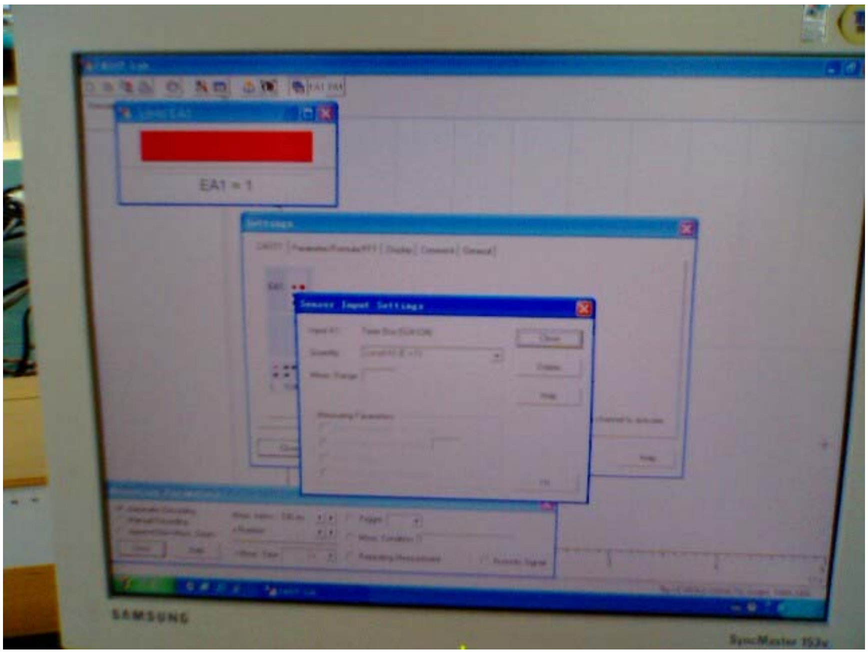
打开电脑，双击桌面上的 Cassy lab 软件，依次关闭弹出的如下提示对话框等



直接进入如下界面，点击 cassy 的下拉框，选取 frequency 选项。的位置，是



设置完毕后，若出现如下图，游标框红色，没有游标



则调节下图中的光电门的位置，是光电门位于弦线一侧，弦线振动时，能周期性的遮挡光电门即可。此时，拨动弦线，按下软件上的时钟按钮，开始测量，当记录频率连续出现五次，即可认为该频率为弦线的特征频率之一。基频为弦线的最小特征频率。

注意：每次使用软件，都需要对软件进行设置。