

实验七 用非线性电路研究混沌现象

长期以来，物理学用两类体系描述物质世界：以经典力学为核心的完全确定论描述一幅完全确定的物质及其运动图象，过去、现在和未来都按照确定的方式稳定而有序地运行；统计物理和量子力学的创立，提示了大量微观粒子运动的随机性，它们遵循统计规律，因为大多数的复杂系统是随机和无序的，只能用概率论方法得到某些统计结果。确定论和随机性是相互独立的两套体系，分别在各自领域里成功地描述过世界。混沌的英文意思是混乱的，无序的。由于长久以来世界各地的物理学家都在探求自然的秩序，而面对无秩序的现象如大气、骚动的海洋、野生动物数目的突然增减及心脏跳动和脑部的变化，却都显得相当无知。这些大自然中不规则的部份，既不连续且无规律，在科学上一直是个谜。但是在七十年代，美国和欧洲有少数的科学家开始穿越混乱来开辟一条出路。包括数学家、物理学家、生物学家及化学家等等，所有的人都在找寻各种不规则间的共相。混沌的研究表明，一个完全确定的系统，即使非常简单，由于自身的非线性作用、同样具有内在的随机性。绝大多数非线性动力学系统，既有周期运动，又有混沌运动，而混沌既不是具有周期性和对称性的有序，又不是绝对的无序，而是可用奇怪吸引子来描述的复杂的有序，混沌是非周期的有序性。本实验将借助非线性电阻，从实验上对这一现象进行一番探索。混沌（Chaos）研究是 20 世纪物理学的重大事件。

混沌研究最先起源于 Lorenz 研究天气预报时用到的三个动力学方程。后来的研究表明，无论是复杂系统，如气象系统、太阳系，还是简单系统，如钟摆、滴水龙头等，皆因存在着内在随机性而出现类似无轨，但实际是非周期有序运动，即混沌现象。现在混沌研究涉及的领域包括数学、物理学、生物学、化学、天文学、经济学及工程技术的众多学科，并对这些学科的发展产生了深远影响。混沌包含的物理内容非常广泛，研究这些内容更需要比较深入的数学理论，如微分动力学理论、拓扑学、分形几何学等等。目前混沌的研究重点已转向多维动力学系统中的混沌、量子及时空混沌、混沌的同步及控制等方面。

【实验目的】

1. 学习有源非线性电阻的伏安特性；
2. 通过研究一个简单的非线性电路，了解混沌现象和产生混沌的原因。

【实验原理】

实验所用电路原理图如图 1 所示。电路中电感 L 和电容 C_1 、 C_2 并联构成一个振荡电路。方程如 (1) 所示：

$$\begin{aligned} C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} &= G(U_{C_1} - U_{C_2}) + i_L \\ C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} &= G(U_{C_2} - U_{C_1}) - gU_{C_1} \\ L \frac{di_L}{dt} &= -U_{C_2} \end{aligned} \quad (1)$$

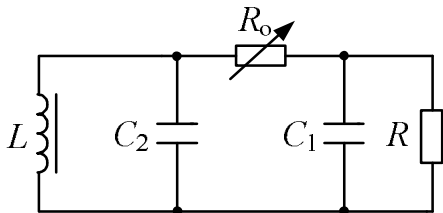


图1 电路原理图

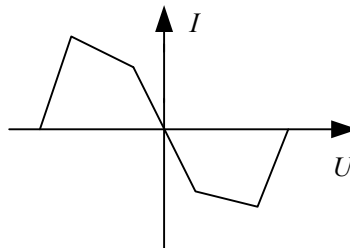


图2 非线性元件 R 的 $U-I$ 特性

这里， U_{C1} 、 U_{C2} 是电容 C_1 、 C_2 上的电压， i_L 是电感 L 上的电流， $G = 1/R_0$ 是电导， g 为 R 的伏安特性函数。如果 R 是线性的， g 是常数，电路就是一般的振荡电路，得到的解是正弦函数。电阻 R_0 的作用是调节 C_1 和 C_2 的位相差，把 C_1 和 C_2 两端的电压分别输入到示波器的 x 、 y 轴，则显示的图形是椭圆。如果 R 是非线性的，会看到什么现象呢？

电路中的 R 是非线性元件，它的伏安特性如图2所示，是一个分段线性的电阻，整体呈现出非线性。 gU_{C1} 是一个分段线性函数。由于 g 总体是非线性函数，三元非线性方程组(1)没有解析解。若用计算机编程进行数值计算，当取适当电路参数时，可在显示屏上观察到模拟实验的混沌现象。

除了计算机数学模拟方法之外，更直接的方法是用示波器来观察混沌现象，实验电路如图3所示。图3中，非线性电阻是电路的关键，它是通过一个双运算放大器和六个电阻组合来实现的。电路中，LC并联构成振荡电路， R_0 的作用是分相，使 A 、 B 两处输入示波器的信号产生位相差，可得到 x 、 y 两个信号的合成图形。双运放 TL082 的前级和后期正、负反馈同时存在，正反馈的强弱与比值 R_3/R_0 、 R_6/R_0 有关，负反馈的强弱与比值 R_2/R_1 、 R_5/R_4 有关。当正反馈大于负反馈时，振荡电路才能维持振荡。若调节 R_0 ，正反馈就发生变化，TL082 处于振荡状态，表现出非线性，从 C 、 D 两点看，TL082 与六个电阻等效于一个非线性电阻，它的伏安特性大致如图(2)所示。

混沌现象表现了非周期有序性，看起来似乎是无序状态，但呈现一定的统计规律，其基本判据有：

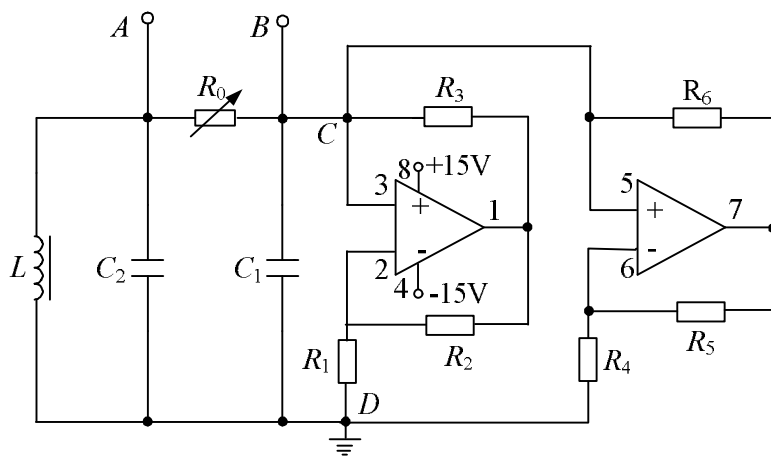


图3 实验电路图

1. 频谱分析: R_0 很小时, 系统只有一个稳定的状态 (对应一个解), 随 R_0 的变化系统由一个稳定状态变成在两个稳定状态之间跳跃 (两个解), 即由一周期变为二周期, 进而两个稳定状态分裂为四个稳定状态 (四周期, 四个解), 八个稳定状态 (八周期, 八个解)……直至分裂进入无穷周期, 即为连续频谱, 接着进入混沌, 系统的状态无法确定; 分岔是进入混沌的途径.

2. 无穷周期后, 由于产生轨道排斥, 系统出现局部不稳定;

3. 奇异吸引子 (Strange Attractor) 存在. 奇异吸引子有一个复杂但明确的边界, 这个边界保证了在整体上的稳定, 在边界内部具有无穷嵌套的自相似结构, 运动是混合和随机的. 它对初始条件十分敏感.

【实验仪器】

电源, 实验接线板, 数字万用表, 非线性电阻, 电容、电感和可调电位器, 示波器. 元件参数如下:

$$L = 18 \text{ mH}, C_1 = 10 \text{ nF}, C_2 = 100 \text{ nF}, R_1 = 3.3 \text{ k}\Omega, R_2 = R_3 = 22 \text{ k}\Omega, R_4 = 2.2 \text{ k}\Omega, \\ R_5 = R_6 = 220 \Omega, R_0 \text{ 是由的两个多圈电位器串联组成, 可以进行粗调和细调.}$$

【实验内容】

1. 测量有源非线性电阻的伏安特性并画出伏安特性图

(1) 因为非线性电阻是含源的, 测量时不用电源, 用电阻箱调节. 伏特表并联在非线电阻两端, 再和安培表、电阻箱串在一起构成回路.

(2) 尽量多测数据点.

2. 倍周期现象、周期性窗口、单吸引子和双吸引子的观察、记录和描述

将电容 C_1, C_2 上的电压输入到示波器的 X, Y 轴, 先把 R_0 调到最小, 示波器屏上可观察到一条直线, 调节 R_0 , 直线变成椭圆, 到某一位置, 图形缩成一点. 增大示波器的倍率, 反向微调 R_0 , 可见曲线作倍周期变化, 曲线由一周期增为二周期, 由二周期倍增至四周, ……直至一系列难以计数的无首尾的环状曲线, 这是一个单涡旋吸引子集. 再细微调节 R_0 , 单吸引子突然变成了双吸引子, 只见环状曲线在两个向外涡旋的吸引子之间不断填充与跳跃, 这就是混沌研究文献中所描述的“蝴蝶”图像, 也是一种奇怪吸引子, 它的特点是整体上的稳定性和局域上的不稳定性同时存在.

利用这个电路, 还可以观察到周期性窗口, 仔细调节 R_0 , 有时原先的混沌吸引子不是倍周期变化, 却突然出现了一个三周期图像, 再微调 R_0 , 又出现混沌吸引子, 这一现象称为出现了周期性窗口. 混沌现象的另一个特征是对初值的敏感性.

观察并记录不同倍周期时 $U_{c1}-t$ 图和 R_0 的值.

【思考题】

1. 用计算机迭代求解方程 $x_{n+1}=1-kx_n^2$, k 的取值范围为 (0-2), 迭代求解的方法是, 对一个 k 值, 任意设定 x_0 , 由上述方程可得到 x_1 , 由 x_1 可得到 x_2 , 如此求解下去. 你会发现对某些 k 值, 可得到一个稳定的解, 即一倍周期, 某些 k 值, 解在两个数值间跳跃, 即二倍周期, 还会有四倍周期、八倍周期……直至无穷周期到混沌. 尝试画出 $k-x$ 图, 并

分析. (x 可取迭代 500 次以后的值)

2. 分析讨论你所观察的混沌现象有哪些特征, 并列举一些你所了解的混沌现象, 以及发生混沌现象的途径.

【参考文献】

- [1] 华金龙等编. 大学物理学 (下册). 上海: 同济大学出版社, 1996
- [2] 郝柏林. 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其它. 物理学进展, 1983
- [3] 赵凯华. 从单摆到混沌. 现代物理知识, 1994
- [4] 郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论. 上海: 上海科技教育出版社, 1993
- [5] 张连芳等. 非线性电路中混沌现象的模拟实验. 工科物理增刊. 北京: 清华大学出版社, 1998
- [6] E.H.洛伦兹. 混沌的本质. 北京: 气象出版社, 1997
- [7] P.R.Hobson and A.N.Lansbury. A simple electronic circuit to demonstrate bifurcation and chaos. Physics Education, 1997