2. 测量、误差和不确定度估计

2.1 测量与有效数字

2.2 测量误差和不确定度估算的基础知识

测量与有效数字

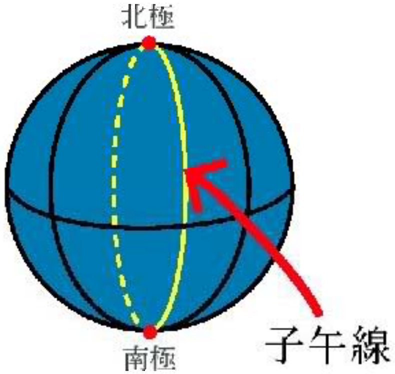
- 测量
- 有效数字的读取
- 有效数字的运算
- 有效数字尾数的舍取规则

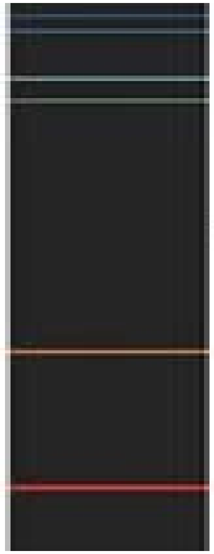
测量

测量用合适的工具或仪器，通过科学的方法，将反映被测对象某些特征的物理量（被测物理量）与选作标准单位的同类物理量进行比较的过程，其比值即为被测物理量的测量值。

例：长度测量

标准单位：





古代常以人体的一部分作为长度的单位。

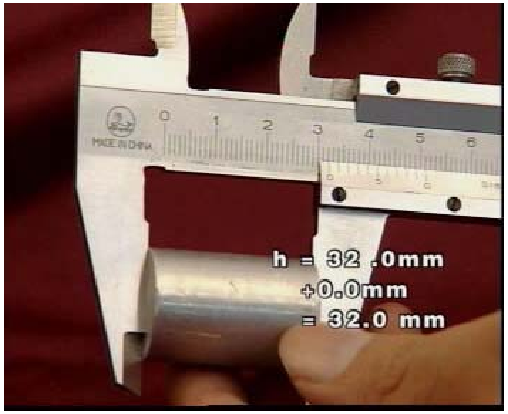
“布指知寸，布手知尺，舒肘知寻。

1790年法国国民议会通过决议，决定采用通过巴黎的地球子午线的四分之一的千万分之一为长度单位

1927年国际协议，以金属镉(Cd)的红色光谱线的长度**1553164.13**倍作为米的长度单位

1983年**10**月第十七届国际计量大会通过了米的新定义：“米是光在真空中**1**／**299792458**秒的时间间隔内所经路程的长度”。

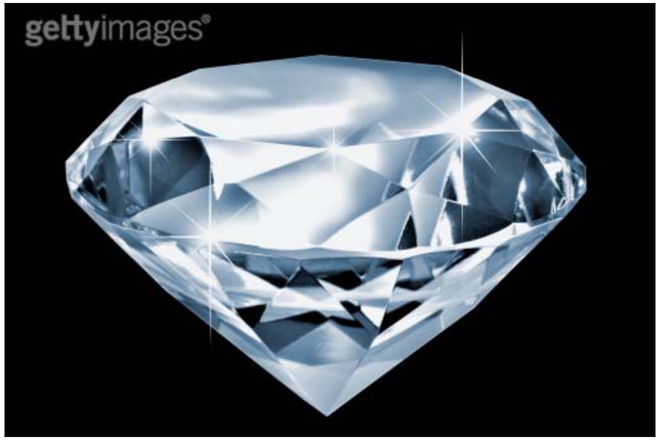
测量工具：



- 测量
  - 直接测量
  - 间接测量

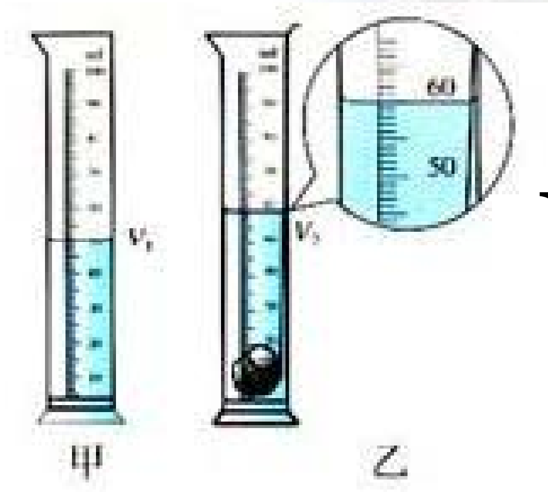
直接测量：直接将待测物理量与选定的同类物理量的标准单位相比较直接得到测量值

间接测量：利用直接测量的量与被测量之间的已知函数关系，求得该被测物理量



ρ

m



V

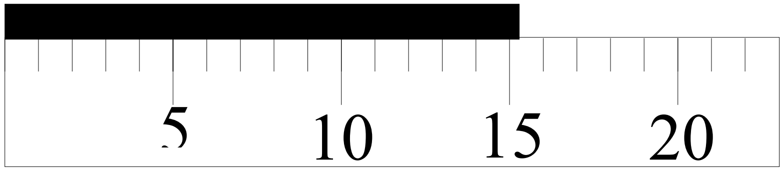
测量结果表示

测量值 = 读数值(有效数字)+单位

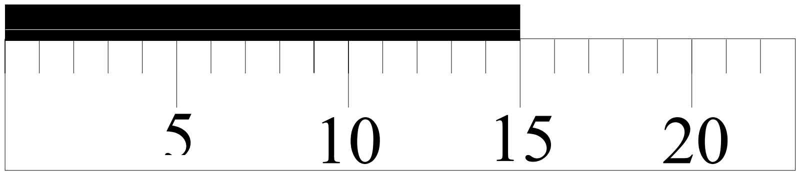
有效数字：可靠数字 + 可疑数字（一位）

有效数字的读取

15.2mm



15.0mm



$$980cm/s^2 = 9.80\mathrm{m/s}^2 = 0.00980\mathrm{km/s}^2 \neq 9.8\mathrm{m/s}^2$$

科学记数法

$$632.8\text{nm} = 0.6328\mu\text{m} = 6.328\times10^{-7}\,\text{m}$$

有效数字的运算：加、减法

诸量相加（相减）时，其和（差）数在小数点后所应保留的位数与诸数中小数点后位数最少的一个相同。

$$
\begin{array}{r}
4.178 \\
+\ 21.3 \\
\hline
25.478 = 25.5
\end{array}
$$

有效数字的运算：乘、除法

诸量相乘（除）后其积（商）所保留的有效数字，只须与诸因子中有效数字最少的一个相同。

$$
\begin{array}{r}
4.178 \\
\times \quad 10.1 \\
\hline
4178 \\
4178 \\
\hline
421978 = 42.2
\end{array}
$$

有效数字的运算：乘方、开方

有效数字与其底的有效数字相同

$$2.56^3 = 16.8$$

$$2.56^{\frac{1}{3}} = 1.37$$

有效数字的运算：取对数

运算后的尾数位数与真数位数相同

例：　$\lg 1.938 = 0.2973$　　$\lg 1.938 = 0.2973$

$$\lg 1938 = 3 + \lg 1.938 = 3.2973$$

有效数字的运算：**指数函数**

运算后的有效数字的位数与指数的小数点后的位数相同（包括紧接小数点后的零）

例：

$$10^{6.25} = 1.8 \times 10^{6}$$

$$10^{6.25} = 1.8 \times 10^{6}$$

$$10^{0.0035} = 1.008$$

$$10^{0.0035} = 1.008$$

有效数字的运算：三角函数

取位随角度有效数字而定

例：Sin30° 00′= 0.5000

Cos20° 16′= 0.9381

有效数字的运算：注意点

- 正确数不适用有效数字的运算规则。
- 取常数与测量值的有效数字的位数相同。

数字修约

按照一定的规则确定一致的位数，然后舍去某些数字后面多余的尾数的过程

数字修约规则（国家标准文件：GB8170-87）

口诀：4舍6入5看右，5后有数进上去，

尾数为0向左看，左数奇进偶舍弃。

例：将下列数字全部修约为四位有效数字

- 1）尾数＜5，1.11840000→1.118
- 2）尾数＞5，1.11860000→1.119
- 3）尾数＝5，
- a）5右面还有不为0的数

  1.11859999→1.119　1.11850001→1.119
- b） 5右面尾数为0则凑偶

  1.11750000→1.118　1.11850000→1.118

有效数字尾数的舍入规则

注意： 一次性修约到指定的位数

例：将数字10.2749945001修约为四位有效数字。

一步到位：**10.2749945001——10.27**（正确）。

错误结果：

10.2749945001——10.274995—— 10.275——10.28

2 .测量误差和不确定度估算的基础知识

- 误差
- 随机误差的处理
- 测量结果的不确定度表示
- 间接测量不确定度的合成

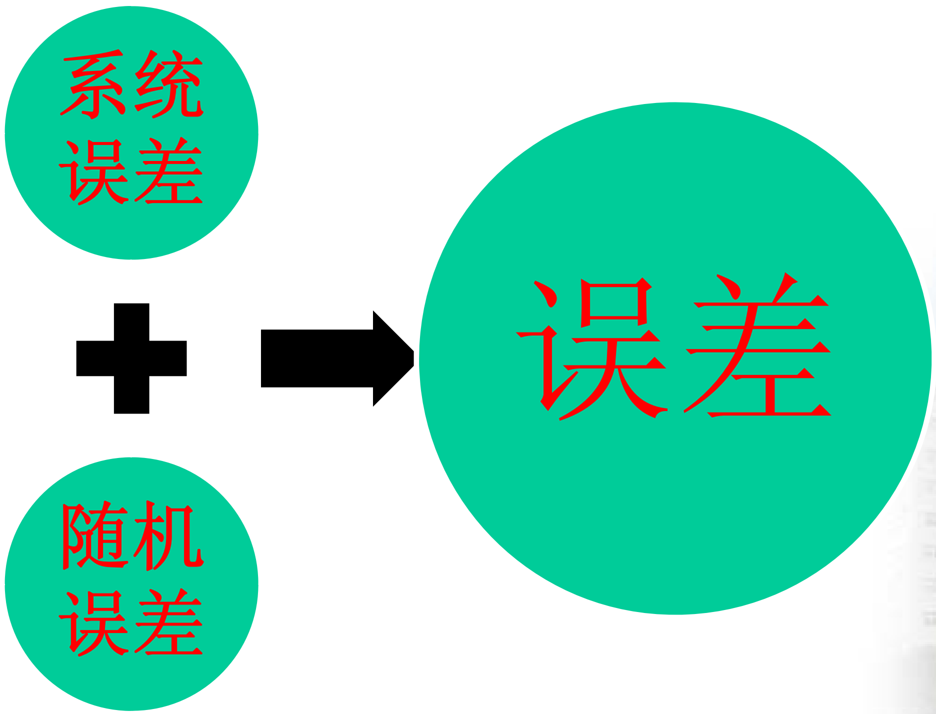
误　差

对一待测物理量 x

误差dx ＝ 测量结果 x －真值 μ

真值：物理量在一定实验条件下的客观存在值

测量误差存在于一切测量过程中，可以控制得越来越小，不可能为零。



系统误差

定　　义：在对同一被测量的多次测量过程中，绝对值和符号保持恒定或随测量条件的改变而按确定的规律变化。

- **产生原因**：由于测量仪器、测量方法、环境带入。
- **分类及处理方法**：

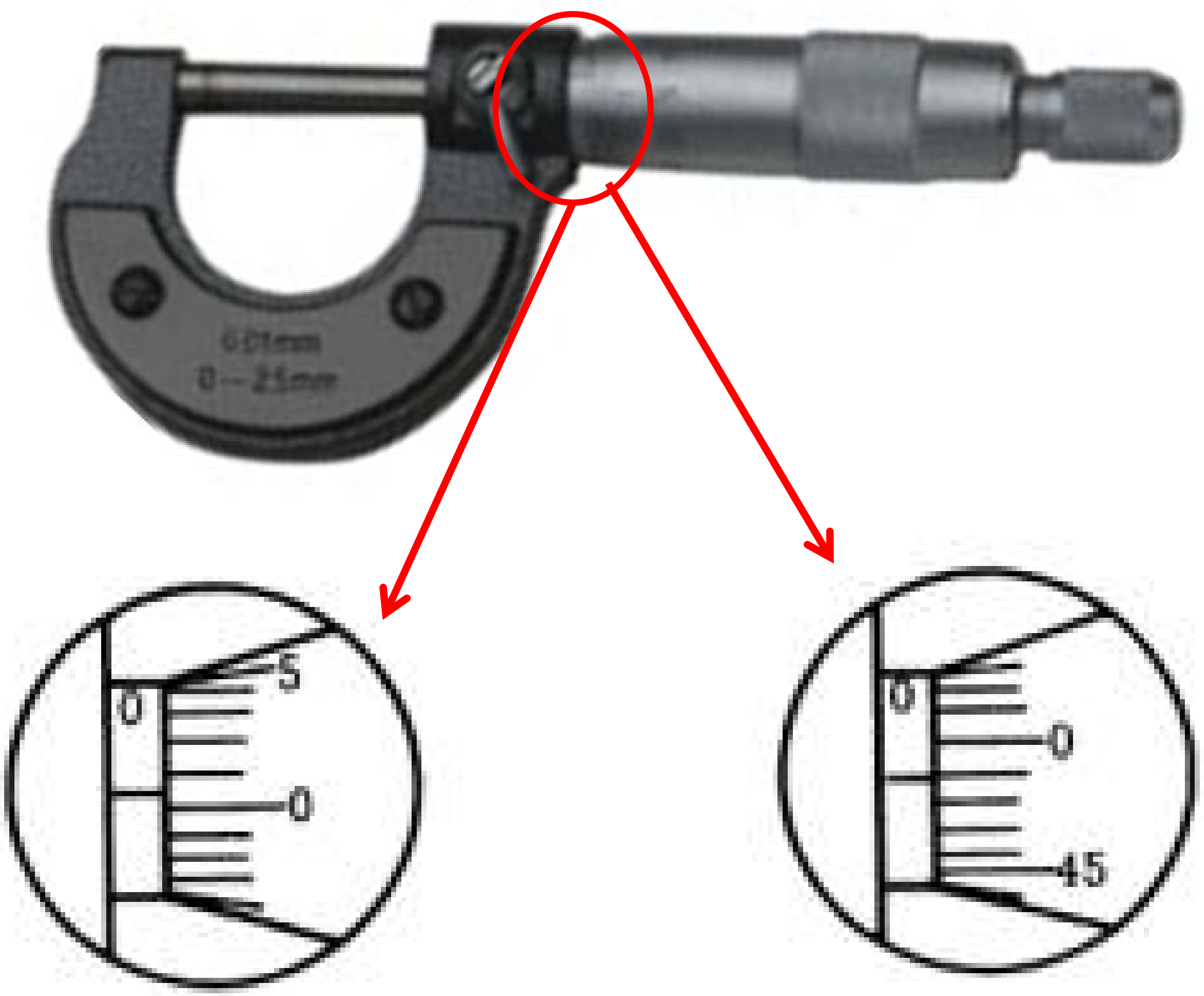
1　已定系统误差：必须修正

电表、螺旋测微计的零位误差；

测电压、电流时由于忽略表内阻引起的误差。

2　未定系统误差：要估计出分布范围

如：螺旋测微计制造时的螺纹公差等。


0.01mm
0－25mm
0
5
0
0
0
45

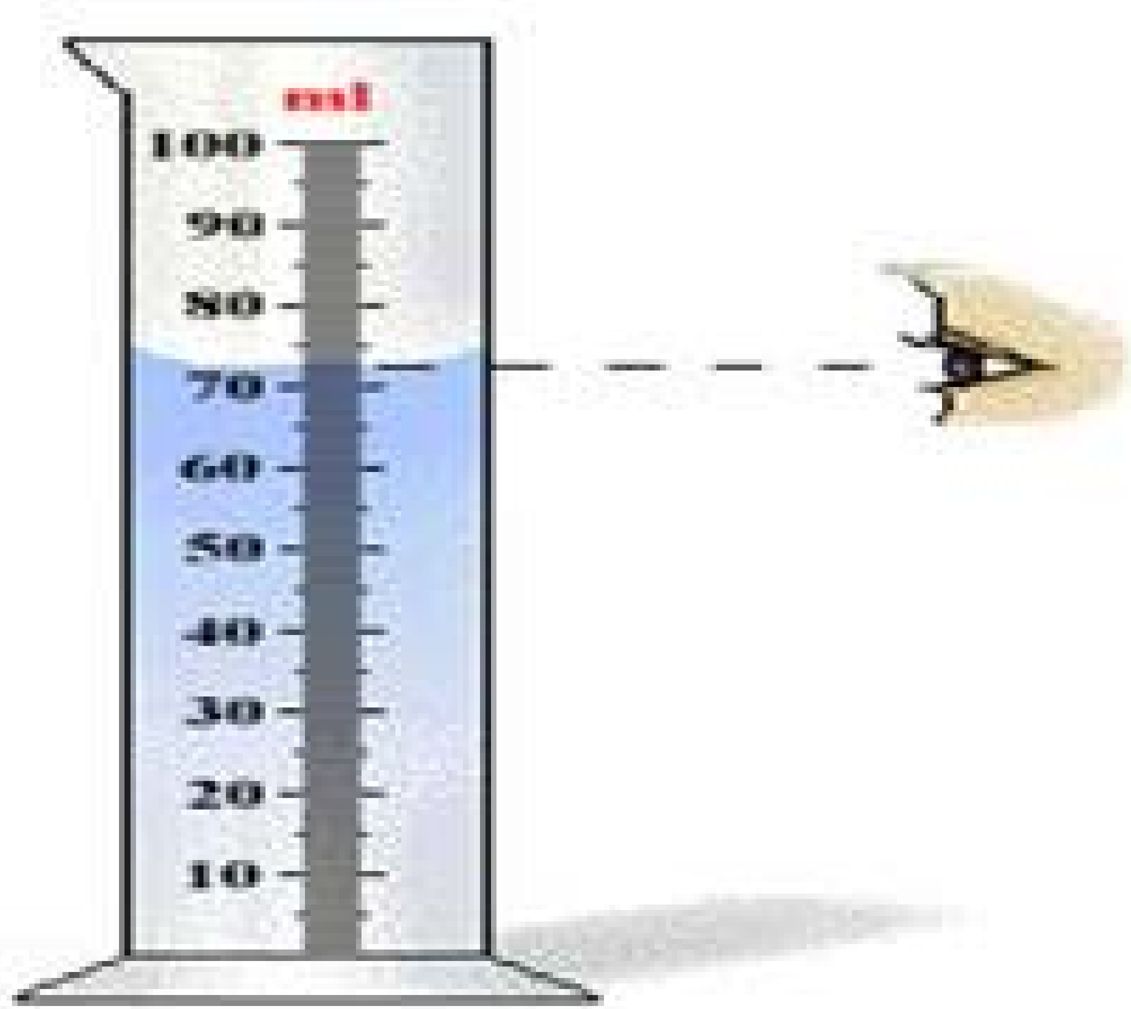
随机误差

定　　义：在对同一量的多次重复测量中绝对值和符号以不可预知方式变化的测量误差分量。

- **产生原因**：实验条件和环境因素无规则的起伏变化，引起测量值围绕真值发生涨落的变化。

例如：

- 电表轴承的摩擦力变动
- 螺旋测微计测力在一定范围内随机变化
- 操作读数时的视差影响


ml
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10

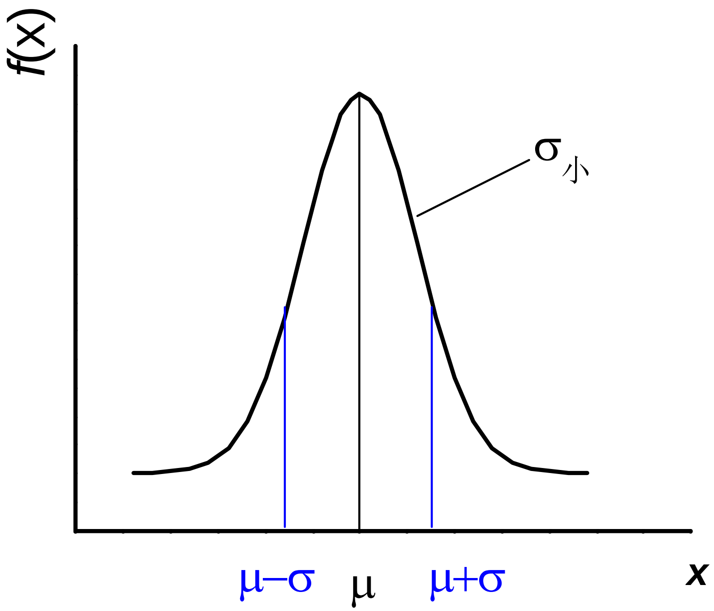
随机误差特点

(1) 小误差出现的概率比大误差出现的概率大；

(2) 无穷多次测量时服从正态分布；

(3) 具有抵偿性。取多次测量的平均值有利于消减随机误差。

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$



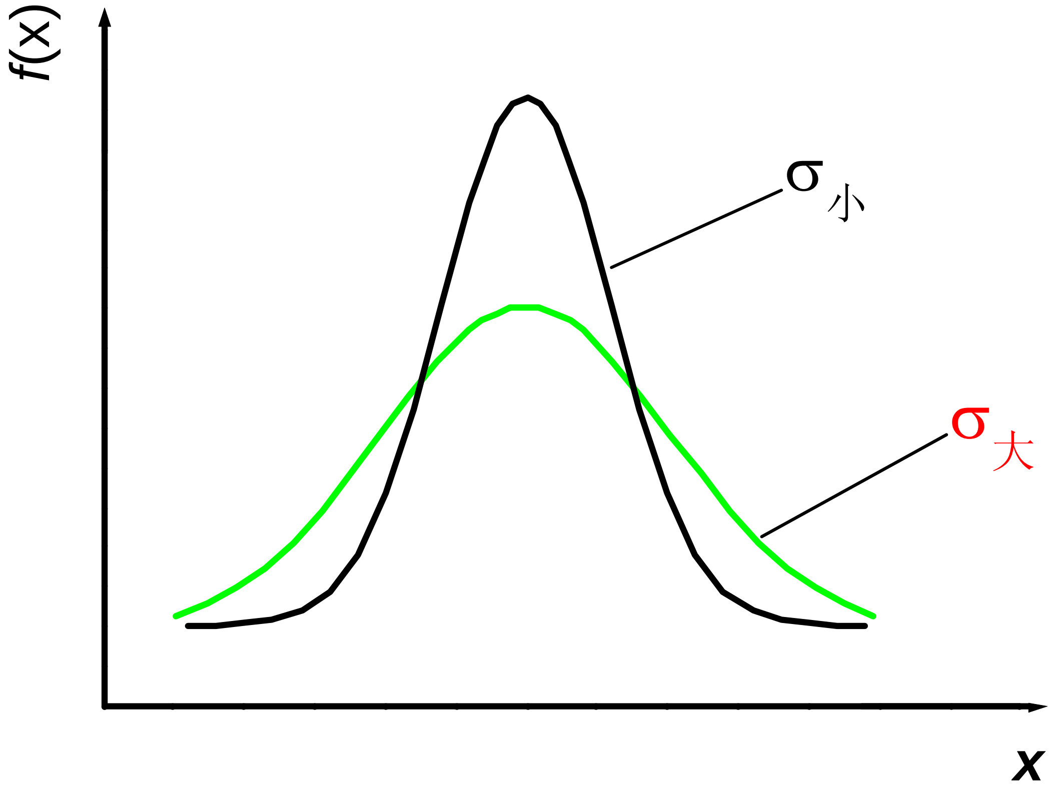
$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n-1}}$$

μ 为真值

σ 为标准差

$f(x)$为x的分布函数

标准差表示测量值的离散程度



标准差小：

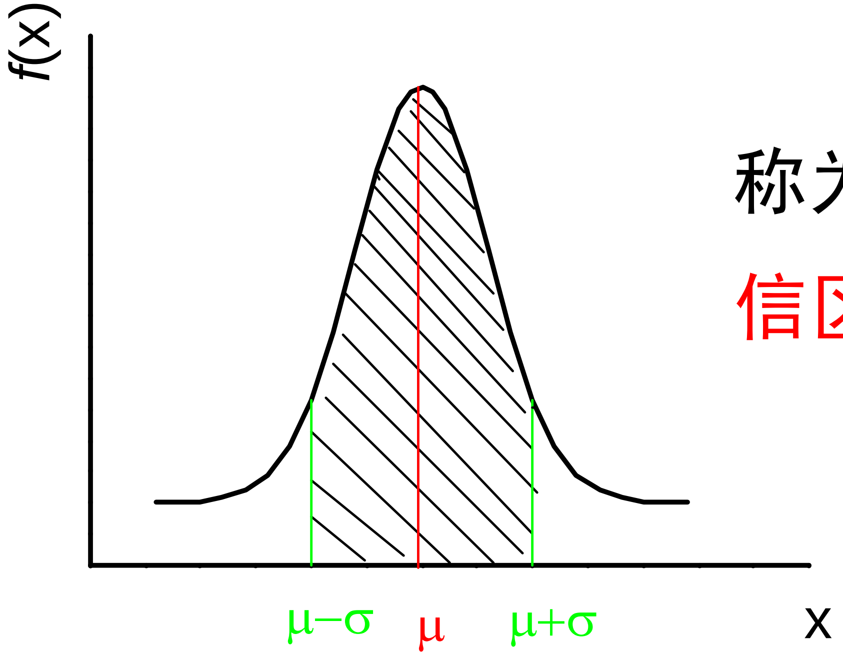
测得值很密集，随机误差分布范围窄，测量的精密度高；

标准差大：

表示测得值很分散，随机误差分布范围宽，测量的精密度低。

任意一次测量值落入区间$[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$

的概率为 $P=\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx = 0.683$



这个概率叫置信概率，也称为置信度。对应的区间叫置信区间，表示为：

$$x = \mu \pm \sigma$$

扩大置信区间，可增加置信概率

$$[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma] \qquad P=\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)dx=0.954$$

$$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma] \qquad P=\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)dx=0.997$$

在测量次数n较小的情况下，测量将呈t分布

n 较小时，偏离正态分布较多，

n 较大时，趋于正态分布。

t分布时，置信区间和置信度的计算需要对特殊函数积分，且不同的测量次数对应不同的值，计算很繁。

平均值

假定对一个物理量进行了n次测量，测得的值为

x_i (i =1, 2，…，n)

$$\boxed{\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) / n}$$

可以用多次测量的算术平均值作为被测量的最佳估计值，测量次数n为无穷大时，算术平均值等于真值。

根据统计理论，有限测量时，算术平均值不等于真值，它的标准偏差为：

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum\left(\bar{x}-x_i\right)^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$

而 $\sigma_{\bar{x}}$ 的意义可以理解为：

待测物理量处于区间 $\left[\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}, \bar{x}+\sigma_{\bar{x}}\right]$ 内的概率为0.683。

物理实验中，置信度一般取作0.95，这时 t 分布相应的置信区间可写为：

$$x = \bar{x} \pm t_{0.95}\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm \frac{t_{0.95}}{\sqrt{n}}\sigma_x$$

n	3	4	5	6	7
$\frac{t_{0.95}}{\sqrt{n}}$	2.48	1.59	1.24	1.05	0.926

一般，我们取测量次数为6次。

测量结果的不确定度表示

概念： 不确定度*u*是由于测量误差存在而对被测量值不能确定的程度。

意义： 不确定度是一定**置信概率**下的**误差限值**，反映了可能存在的误差分布范围。

置信概率一般取0.95

不确定度组成

A 类分量 Δ_A：可以用统计学方法估算的分量，一般指随机误差。

测量次数很大时，$\Delta_A = 2\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\sigma_x$

测量次数不大时，$\Delta_A = \dfrac{t_{0.95}}{\sqrt{n}}\sigma_x$

不确定度组成

Shanghai Jiao Tong University 上海交通大學

B 类分量 Δ_B：不能用统计学方法估算的分量，一般指系统误差。

若不特别说明

$$\Delta_B = \frac{\text{仪器允差}}{c}$$

c 叫置信因子,置信度取0.95时，**$c = 1.05$**

合成方法：

$$u_x = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2}$$

相对不确定度：

$$u_{rx} = \frac{u_x}{\bar{x}} \times 100\%$$

结果表示:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \pm u_x \\ u_{rx} = \dfrac{u_x}{\bar{x}} \times 100\% \end{cases}$$

注意：

1. 平均值有效数字位数不要超过测量值的有效数字；

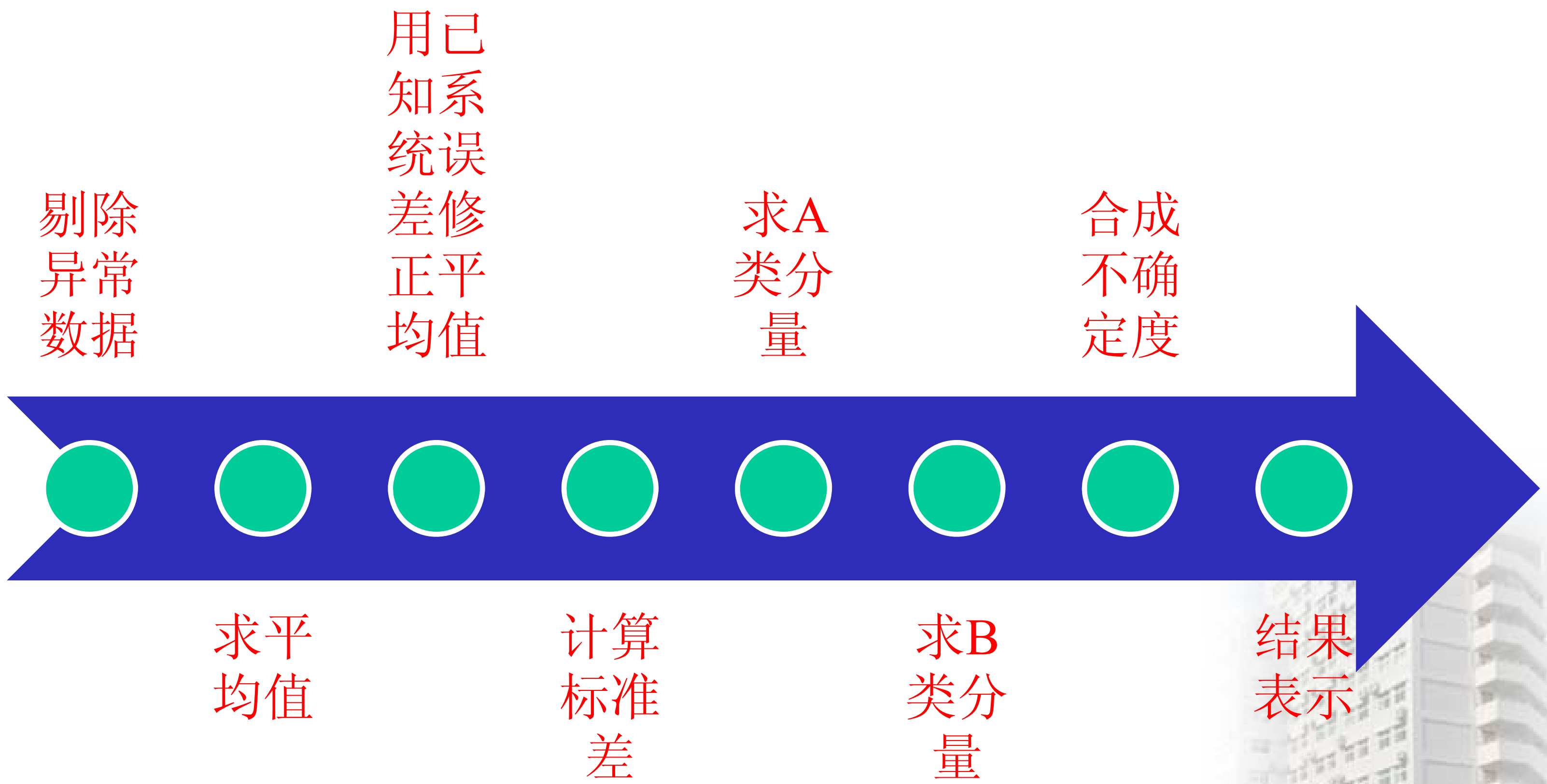
2. 不确定度和相对不确定度保留1-2位有效数字；

（9.858±0.512）m　　×

3. 不确定度的最后一位数字要和平均值的对齐。

(1.250±0.21)m　　×

直接测量量不确定度估算过程与表示



直接测量不确定度计算举例

例1：用螺旋测微计测某一钢丝的直径，原始数据见下表，请给出完整的测量结果。

原始数据表格

$d_0 = +0.004$ mm , 螺旋测微计的仪器允差为$\Delta_{仪} = 0.004$mm						
	1	2	3	4	5	6
d_i'（mm）	0.249	0.250	0.247	0.251	0.253	0.250

例 1 解：

$d_0 = +0.004$ mm，螺旋测微计的仪器允差为$\Delta_{仪}$=0.004mm						
	1	2	3	4	5	6
d_i' (mm)	0.249	0.250	0.247	0.251	0.253	0.250
$d_i = d_i' - d_0$(mm)	0.245	0.246	0.243	0.247	0.249	0.246
$\overline{d}_i$ (mm)	0.246					
$\overline{d} - d_i$ (mm)	0.001	0.000	0.003	-0.001	-0.003	0.000

没有异常数据，不用剔除

例 1 解：

$$\sigma_d = \sqrt{\sum\left(\bar{d} - d_i\right)^2 /(n-1)} = 0.002(mm)$$

$$\Delta_A = \frac{t_{0.95}}{\sqrt{n}}\sigma_x = 1.05\sigma_x \approx 0.002mm$$

$$\Delta_B = \frac{\Delta_{仪}}{1.05} \approx 0.004(mm)$$

$$u_d = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \approx 0.004(mm)$$

$$u_{rd} = \frac{u_d}{\bar{d}} \times 100\% = 2\%$$

测量结果表示为

$$\begin{cases} d = 0.246 \pm 0.004(mm) \\ u_{rd} = 2\% \end{cases}$$

间接测量不确定度的计算

设待测量与各直接测量之间有函数关系：

$$x = f\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\right)$$

待测量的**平均值**可直接用各量平均值计算，则：

$$\overline{x} = f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \cdots, \overline{x_n}\right)$$

不可分别计算再取平均——非线性

间接测量不确定度的计算

待测量量的不确定度与各直接测量量的不确定度的关系为：

（1） $$u_x = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_{x_i} \right)^2}$$ 计算和差形式方便

（2） $$\frac{u_x}{x} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} u_{x_i} \right)^2}$$ 计算乘除指数形式方便

常用公式

$$x = x_1 \pm x_2 \qquad u_x = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$$

$$x = x_1 x_2 \text{或} x_1 / x_2 \qquad u_{rx} = \sqrt{u_{rx_1}^2 + u_{rx_2}^2}$$

$$x = x_1^k x_2^m \qquad u_{rx} = \sqrt{(ku_{rx_1})^2 + (mu_{rx_2})^2}$$

同学们可以用偏微分知识自己推导这些公式

间接测量的不确定度合成过程

误差传递公式关系是加、减

求直接测量量的平均值

求直接测量量的不确定度

利用误差传递公式求间接测量量的不确定度

用各量的平均值求间接测量量的平均值

求出间接测量量的相对不确定度

误差传递公式关系是乘、除

求直接测量量的平均值

求直接测量量的相对不确定度

利用误差传递公式求间接测量量的相对不确定度

用各量的平均值求间接测量量的平均值

求出间接测量量的不确定度

表示结果

间接测量量的不确定度合成举例

例2： 已测得金属环的外形尺寸如下，要求给出其体积的测量结果

$D_{内径} = 2.880 \pm 0.004\ \text{cm}$、$D_{外径} = 3.600 \pm 0.004\ \text{cm}$、$h = 2.575 \pm 0.004\ \text{cm}$

解：

1. $\overline{V} = \dfrac{\pi}{4}(\overline{D}^2_{外径} - \overline{D}^2_{内径})\overline{h} = 9.436(cm^3)$

2. 由于间接测量与直接测量量之间没有简单关系，故先推导出间接测量的合成不确定度

$$u_V = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_{x_i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D_{内径}} u_{D内径}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial D_{外径}} u_{D_{外径}}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} u_h\right)^2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\sqrt{(2D_{内径} h u_{D_{内径}})^2 + (2D_{外径} h u_{D_{外径}})^2 + \left[(D^2_{外径} - D^2_{内径})u_h\right]^2} = 0.08(cm^3)$$

间接测量量的不确定度合成举例

3. 求相对不确定度

$$u_{rV} = \frac{u_V}{\overline{V}} = 0.8\%$$

4. 实验结果表示

$$\begin{cases} V = 9.44 \pm 0.08(cm^3) \\ u_{rV} = 0.8\% \end{cases}$$

间接测量量的不确定度合成(共轭法测薄透镜焦距)说明

（1）．道轨读数最大允差为±0.2mm，B类不确定度：$\Delta_B = \frac{0.2}{1.05} = 0.2mm$

（2）．单次测量：不确定度取 $\Delta\,(\text{单次}) = 0.2mm$

（3）．6次测量：直接测量量（位置）不确定度为 $\Delta_A(6\text{次}) = 1.05\sigma_A$

（4）．所有距离（ s, s', D, d ）都是两个位置的坐标差

$$D = x_2 - x_1 \qquad \begin{cases} \overline{D} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \\ u_D = \sqrt{u_{x_2}^2 + u_{x_1}^2} \end{cases} \quad f = \frac{D^2 - d^2}{4D} \quad u_f = \frac{1}{4}\sqrt{(1 + \frac{d^2}{D^2})^2 u_D^2 + \frac{4d^2}{D^2} u_d^2}$$

（单次测量平均值就是单次测量结果本身）

间接测量量的不确定度合成(物距像距法测薄透镜焦距)说明

不确定度传递公式推导

物距相距法：
$$f=\frac{ss'}{s+s'}\qquad u_f=\frac{1}{(s+s')^2}\sqrt{s^4u_{s'}^2+s'^4u_s^2}$$

实验预习

- 明确实验目的，
- 预习实验原理，
- 了解实验注意事项。

预习报告内容

上海交通大学 Shanghai Jiao Tong University

- 实验名称，实验目的
- 实验简图（电路图或光路图）
- 记录主要公式
- 列出记录数据表格

实验操作要求

上海交通大学 Shanghai Jiao Tong University

操作前

了解实验室规则 | 仪器使用方法及注意事项

操作中

试验性探索操作 | 观察实验现象，记录数据

操作后

整理好仪器 | 请老师检查数据并盖章

用钢笔或圆珠笔记录数据，原始数据不得改动

实验报告

特色

抄袭处理：

0分 0分

实验报告内容

上海交通大学 Shanghai Jiao Tong University

实验目的和原理	• 实验目的 • 实验原理 • 实验仪器设备
实验数据和处理	• 实验数据图表 • 数据处理
实验讨论和误差分析	• 实验结果或实验现象分析 • 实验结果误差分析 • 实验小结

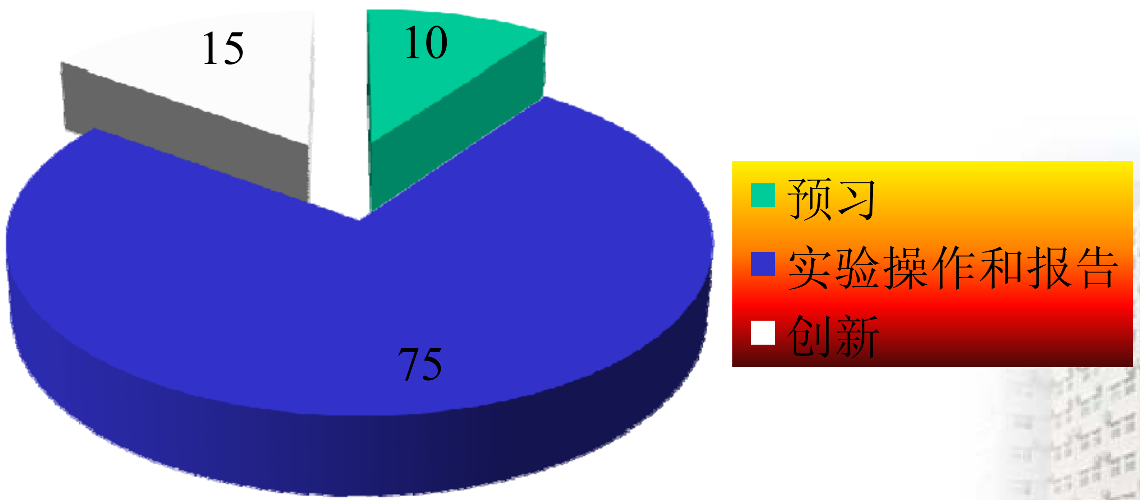
中心目前暂不接受电子版实验报告！！

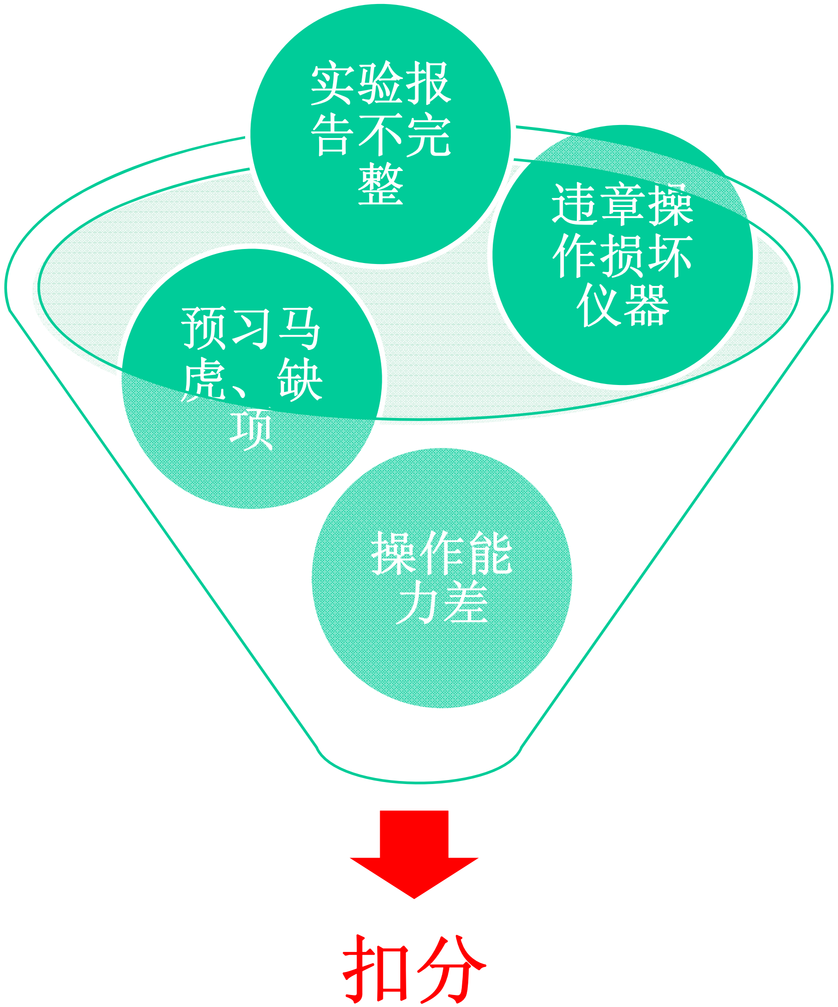
教学环节中应注意

1. 学生上课必须准时，迟到按缺课处理。
2. 未完成预习和预习报告者，教师有权停止其实验或成绩降档！
3. 进实验室做实验，其实验者序号必须与仪器组号一一对应！离开实验室前，数据记录须经教师审阅签名。
4. 实验报告（含预习报告）必须在一周内交至物理实验楼三楼的教师信箱（按图章标记）！不然该实验按缺席处理。

物理实验成绩评分标准

满分 １００




实验报告不完整
违章操作损坏仪器
预习马虎、缺项
操作能力差
扣分

实验成绩确认查询

请将所有实验报告保存到学期结束.

在第17周周三前，请每位同学上网查对自己所有实验成绩，如有误则请带好该次实验的实验报告至教务办公室登记更正.

成绩一旦确定并发出将不再更改.

实验报告交接方法

实验完成后一周内交报告
报告投至物理实验楼三楼教师信箱

↓

教师收到报告后一周内批改好
报告投至物理实验楼三楼各班班级信箱

↓

班长或课代表开启信箱取报告

收获在于努力！